EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites.

* * * * *

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME I

On note I l'intervalle $]-1,+\infty[$ et on définit sur I la fonction f par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)x} & \text{si } x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$$

Partie I : *Etude de f*

1) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur I.

2) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I et donner l'allure de sa courbe représentative (on pourra être amené à dériver deux fois la fonction $x\mapsto(2x+1)\ln(1+x)-x$).

3) On définit sur I les fonctions g et h par :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases} \quad \text{et} \quad h(x)=\frac{1}{1+x}$$

a) Montrer que la fonction g est de classe C^∞ sur I.
En déduire que f l'est également.

b) Préciser, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g^{(n)}(0)$ et $h^{(n)}(0)$.

c) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j}$.

Partie II : *Développement en série entière*

Le but de cette partie est de montrer que f est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

1) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_1=-\dfrac{3}{2}\\ \forall n\geq 2,\ u_n=-\dfrac{2n+1}{n+1}u_{n-1}-\dfrac{n}{n+1}u_{n-2}\end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(-1)^n\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}$.

b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est égal à 1.

2) On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ x(x+1)^2 y'+(x+1)(2x+1)y=1$$

a) Résoudre (E) sur $I_1=]-1,0[$ et $I_2=]0,+\infty[$.

b) Montrer que (E) admet une unique solution sur I, et que cette solution est f.

c) Montrer qu'il existe une unique série entière – que l'on précisera – de rayon de convergence $R>0$, et solution de (E) sur $]-R,R[$.

d) Déduire de ce qui précède que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Partie III : *Calcul d'une intégrale*

A. 1) a) Etablir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{(1+t)t}dt$.

b) On note J sa valeur. Vérifier que $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}dx$.

2) Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x>0$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}e^{-kx}$.

3) Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $J_k=\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-kx}dx$.

4) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|J-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}J_k\right|\le\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-nx}}{e^x-1}dx$.

5) En déduire que $J=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

(On pourra utiliser, après l'avoir démontré, le fait que la courbe de la fonction exponentielle se situe au dessus de sa tangente en son point d'abscisse nulle.)

6) Déterminer n tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ soit une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

(On ne demande pas de déterminer effectivement cette valeur approchée.)

B. Soit θ la fonction de la variable réelle x, périodique de période 2π, telle que $\theta(x)=x^2$ pour tout x dans $[-\pi,\pi]$.

1) Déterminer la série de Fourier de θ.

2) Justifier que θ est somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire la valeur exacte de J.

PROBLEME II

On munit ici $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $\boldsymbol{B}$ et on identifie :

- Tout vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$ à la matrice colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de ses composantes x et y dans $\boldsymbol{B}$.
- Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ à sa matrice M dans $\boldsymbol{B}$, ce qui donne un sens à des écritures comme $\operatorname{Im} M$, $\operatorname{Ker} M$ ...

Pour tout vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note $\varphi(V)$ (resp. $\psi(M)$) la somme des carrés des deux composantes de V (resp. des quatre coefficients de M) :

$$\varphi(V) = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \psi(M) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

On note enfin T l'ensemble des matrices réelles M carrées d'ordre 2 vérifiant à la fois :

- M est symétrique.
- M est nulle ou est de rang égal à 1.
- M a des valeurs propres positives ou nulles.

Partie I : *Exemples de matrices appartenant ou non à T*

Etudier l'appartenance à T des trois matrices A, B et C définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Partie II : *Etude des matrices appartenant à T*

1) T est-il un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{M}_2(\mathbb{R})$?

2) Pour tout vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbb{R}^2$, on considère la matrice carrée d'ordre deux $M = V\,{}^tV$, où ${}^tV$ désigne la transposée de V.

a) Comparer $\psi(M)$ et $\left[\varphi(V)\right]^2$ et montrer que M est nulle si et seulement si V est nul.

b) Montrer que $MV = \varphi(V)V$ et que $M^2 = \varphi(V)M$.

c) Déterminer en fonction de V les valeurs propres et les sous-espaces propres de M lorsque $V \neq 0$.

d) Etablir que, quel que soit $V \in \mathbb{R}^2$, M appartient à T.

3) On considère réciproquement une matrice M non nulle de T.

a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul X appartenant à $\mathbb{R}^2$ tel que $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(X)$, puis un vecteur non nul Y appartenant à $\mathbb{R}^2$ tel que $M = X\,{}^tY$.

b) Montrer, en utilisant la symétrie de la matrice M, qu'il existe k dans $\mathbb{R}^*$ tel que $Y = kX$.

c) Montrer enfin que k est strictement positif et en déduire l'existence d'un vecteur non nul V tel que $M = V'V$.

4) On considère l'application f associant à tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ la matrice carrée $f(V) = V'V$.

a) f est-elle linéaire ?

b) f est-elle injective de $\mathbb{R}^2$ dans T ?

c) f est-elle surjective de $\mathbb{R}^2$ dans T ?

Partie III : ***Approximation d'une matrice symétrique d'ordre 2 par une matrice de l'ensemble T***

On considère dans cette question deux nombres réels p et q tels que $0 < p < q < 1$ et $p + q = 1$ et la matrice symétrique A définie par $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$. L'objectif de cette partie est de trouver les matrices M appartenant à T, qui minimisent l'expression $\psi(A - M)$.

1) La matrice A appartient-elle à T ?

2) On considère $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $A - V'V$, puis exprimer en fonction de x et y la quantité $F(x,y) = \psi(A - V'V)$.

3) Calculer les dérivées partielles de F par rapport aux deux variables x et y, puis en déduire deux conditions nécessaires pour que F présente un extremum en (x,y).

4) Résoudre le système suivant :

$$(S) \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

En déduire les seuls points en lesquels F est susceptible de présenter un extremum.

5) Donner un équivalent de $F(x,x) - F(0,0)$ et de $F(x,-x) - F(0,0)$ quand x tend vers 0. La fonction F présente-t-elle un extremum en $(0,0)$?

6) Etablir pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ l'égalité suivante :

$$F(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2 + 2q(x-y)^2 + (q-p)^2$$

En déduire le minimum de l'expression $\psi(A - V'V)$ lorsque V décrit $\mathbb{R}^2$, ainsi que les vecteurs V réalisant ce minimum.

7) Montrer enfin qu'il existe une unique matrice M appartenant à T, qui minimise l'expression $\psi(A - M)$. Préciser la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par cette matrice M.

Fin de l'énoncé